# Лекция 1. О влиянии структуры действующих сил на устойчивость движения линейной механической системы с двумя степенями свободы

## 1.1 Структура сил в линейной механической системе с двумя степенями свободы

Уравнение динамики линейной механической системы с двумя степенями свободы представим в виде



где  (mass) ‑ матрица инерционных коэффициентов,  (velocity) ‑ матрица скоростных сил,  (position)­ матрица позиционных сил,  ‑ вектор обобщённых координат.

Матрица  представима в виде суммы симметрической матрицы , часто отвечающей диссипативной (скоростной) силе и кососимметрической матрицы , относящейся к гироскопической (скоростной) силе.

Матрица  представима в виде суммы симметрической матрицы , отвечающей потенциальной (позиционной) силе и кососимметрической матрицы , относящейся к неконсервативной (позиционной) силе.

## 1.2. Система с позиционными силами

Рассмотрим тот случай, когда скоростные силы отсутствуют () и будем считать, что . При этом уравнение динамики линейной механической системы с двумя степенями свободы будет



Соответствующее характеристическое уравнение может быть представлено в виде:



где



параметр  равен



параметр  - квадрат элемента матрицы  неконсервативной позиционной силы, . Таким образом,



Сначала будем рассматривать случай , , и заставим параметр  изменяться от 0 до . Тогда



Обозначим



тогда



При 



Характеристическое уравнение имеет два действительных корня, расположенных на плоскости корней симметрично по разные стороны мнимой оси, и два сопряженных чисто мнимых корня. Такая картина имеет место при увеличении параметра  до тех пор, пока .

Если 



Корни оказываются на мнимой оси, и будут оставаться на ней, пока .

В случае 



возникают две пары совпадающих чисто мнимых корней.

При 



получаем две пары сопряженных комплексных корней, симметричные относительно мнимой оси.

Наличие положительных действительных корней характеризует ситуацию, которую называют ***дивергенция (divergence) –* *расхождение****.*

Наличие чисто мнимых (не равных нулю и не кратных) корней характеризует ситуацию, которую называют ***вибрации* *(vibration) – колебания****.*

Наличие комплексных корней с положительной действительной частью характеризует ситуацию, которую называют ***флаттер* *(flutter)* — *раскачка***.

Теперь рассмотрим случай , .



Обозначим



тогда



При 



получаем две пары сопряженных чисто мнимых корней – вибрация (колебания). Такая картина имеет место при увеличении параметра  до тех пор, пока .

Если 



имеем две совпадающие пары сопряженных чисто мнимых корней.

При 



Возникают две пары сопряженных комплексных корней, симметричные относительно мнимой оси – флаттер.

## 1.3. Гироскопическая система

Рассмотрим теперь случай, когда диссипативные (скоростные) и неконсервативные (позиционные) силы отсутствуют  и будем считать, что . Тогда уравнение динамики линейной механической системы с двумя степенями свободы представляется в виде



Такие системы называют гироскопическими. Соответствующее характеристическое уравнение может быть представлено в виде:



где , параметр  - квадрат элемента матрицы  гироскопических сил, .

Сначала будем рассматривать случай , , и заставим параметр  изменяться от 0 до . Для квадратов корней характеристического уравнения имеем



Заметим, что



Обозначим



тогда



При 



Имеем четыре действительных корня, расположенных на плоскости корней симметрично по разные стороны мнимой оси (дивергенция). Такая картина имеет место при увеличении параметра  до тех пор, пока .

Если 



имеем две пары кратных действительных корней, расположенных симметрично относительно мнимой оси (дивергенция).

При 



получаем две пары кратных чисто мнимых корней.

При возрастании параметра  в пределах  корни двигаются по окружности радиуса  от действительной к мнимой оси, сохраняя симметрию картины относительно действительной и мнимой оси. При этом имеет место ситуация флаттера.

При , а, следовательно, и 



возникают две пары сопряженных чисто мнимых корней



Состояние флаттера – раскачки при возрастании параметра  перешло в состояние вибраций – колебаний конечной амплитуды. Этот эффект называют явлением гироскопической стабилизации.

Напомним, что в рассматриваемом случае , то есть



Например, для диагональной матрицы потенциальных сил



гироскопическая стабилизация наступает в случае



# Лекция 2. Об устойчивости линейных систем с двумя степенями свободы

## 2.1. Структура характеристического уравнения. Граница устойчивости

Уравнение динамики линейной механической системы с двумя степенями свободы представим в виде



где  (mass) ‑ матрица инерционных коэффициентов,  (velocity) ‑ матрица скоростных сил,  (position)­ матрица позиционных сил,  ‑ вектор обобщённых координат. Соответствующее характеристическое уравнение будет



Здесь буквами  обозначены определители – (детерминанты) соответствующих матриц, буквами  (trace),  (spur),  (след) обозначены следы соответствующих матриц, символом “+” обозначены соответствующие присоединённые матрицы:



Отметим инвариантность перечисленных выше коэффициентов относительно невырожденных преобразований обобщённых координат, а также то, что матрица инерционных коэффициентов всегда является симметричной и положительно определённой, поэтому



Плоскость корней характеристического уравнения естественно разбивается на три подпространства: мнимую ось «Im», полуплоскость левее мнимой оси «L», полуплоскость правее мнимой оси «R». Условия того, чтобы корни характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости «L», даются критериями Рауса-Гурвица или Льенара-Шипара.

В соответствии с критерием Льенара-Шипара, все корни уравнения лежат в левой полуплоскости, если



Условия того, чтобы корни не располагались в правой полуплоскости «R», не только несколько расширяют условия Рауса-Гурвица, дозволяя обращаться в ноль свободному члену характеристического полинома и соответствующему определителю третьего порядка



но и вводят в рассмотрение следующую дополнительную возможность.

Если в характеристическом уравнении равны нулю коэффициенты при нечетных степенях , уравнение оказывается биквадратным , и , то имеет место следующее условие отсутствия корней в правой полуплоскости



Отметим, что если , то, не уменьшая общности, можно, выбирая должным образом единицы массы и времени, положить . Иначе говоря, при условии положительности коэффициентов характеристического уравнения, граница области устойчивости по Ляпунову движений системы с двумя степенями свободы зависит от трех параметров . Уравнение этой границы имеет вид



Ее портрет представлен на рис. 2.1.



**Рис. 2.1**

Здесь



Это часть поверхности, которая называется «зонтик Уитни» (*Whitney’s Umbrella*).

Граница области асимптотической устойчивости по Ляпунову многопараметрического семейства решений не обязательно является гладкой поверхностью. Она может обладать особенностями. В частности, в трехпараметрических задачах возникает особенность «тупик на краю» (deadlock of an edge), которая является половиной зонтика Уитни.

Существует интересная категория механических и физических систем, которые демонстрируют следующие парадоксальные явления в поведении: при моделировании как системы без демпфирования они обладают устойчивым равновесием или устойчивыми движениями, но когда вводится небольшое (сколь угодно малое) демпфирование, некоторые из этих равновесий или устойчивых движений становятся неустойчивыми.

В 1950-х и 1960-х годах публикации Х. Циглера, В.В. Болотина мотивировали значительную деятельность по исследованию динамической неустойчивости равновесных конфигураций конструкций при неконсервативных нагрузках.

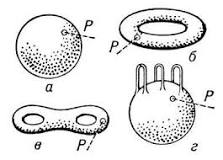
Они явно выявили аспект чувствительности устойчивости неконсервативных структур к малым демпфирующим силам. Выяснилось, что **критическая** нагрузка для конструкции с малым демпфированием может быть значительно меньше, чем для такой же структуре без демпфирования. Другими словами, существует широкий диапазон нагрузок, для которых недемпфированная конструкция рассчитана как устойчивая, но которые вызывают нестабильность, как только к конструкции добавляется небольшое демпфирование.

Эти явления активно изучались в 1960-х годах, чтобы обеспечить более фундаментальное понимание, и они продолжали изучаться с помощью более сложных инструментов, включая ранние попытки использовать теорию сингулярностей, пока в середине 1990-х годов не стало понятно, что парадокс дестабилизации связан с эффектом «зонтика» Уитни. На самом деле голландский математик и механик Оэне Боттема еще в 1956 году прояснил парадокс Циглера.

Зонтик Уитни

В замечательной статье 1943 г. Хасслер Уитни описал особенности отображений дифференциального n-многообразия.

Что такое многообразие в математике?



Многообразие, математическое понятие, уточняющее и обобщающее на любое число измерений понятия линии и поверхности, не содержащих особых точек т. e. линии без точек самопересечения, концевых точек и т. п.

Парадокс Циглера

В 1952 г. Ханс Циглер из Цюриха опубликовал статью, ставшую классической и широко известной в сообществе инженеров-; это также привлекло внимание математиков. Изучая упрощенную двумерного модель упругого стержня, закрепленного с одного конца и сжатого тангенциальной концевой нагрузкой, он неожиданно столкнулся с явлением парадоксального характера: область устойчивости двузвенника Циглера меняется скачком при переходе от случая, когда демпфирование в системе очень мало, к случаю, когда оно исчезло.

Условие

а1а2а3 = а1 а1 + а3 а3

– уравнение поверхности V третьей степени – «зонтика Уитни», которое следует рассматривать при a1 ≥ 0, a3 ≥ 0. Очевидно, V — линейчатая поверхность, линия a3 = m x a1, a2 = m + 1/m (0 < m < ∞) лежит на V . Линия параллельна 0a1a3-плоскости и пересекает ось a2 в a1 = a3 = 0, a2 = m + 1/m ≥ 2. Ось a2 представляет собой двойную линию V , a2 > 2 — ее активная часть. Через каждую ее точку проходят две образующие; они совпадают при a2 = 2 (m = 1), а при a2 → ∞ их направления стремятся к направлениям осей a1 и a3 (m = 0,m = ∞). Точка (a1, a2, a3) лежит на V или выше V . Точка (0, 2, 0) находится на V , но если перейти к a2 по прямой a3 = m a1, то координата a2 имеет предел m+1/m, который > 2, но при m = 1.

**Немного о двигателе постоянного тока с независимым или параллельным возбуждением. (Он нам будет часто встречаться).**

Уравнения модели этого двигателя представляются в виде системы



Здесь - момент инерции якоря, - момент, действующий на якорь со стороны токового контура, - индуктивность контура, *R* – сопротивление контура, *I-* ток, U – подаваемое напряжение, связанное с поворотом якоря обратной связью.

Принципиальную роль играет понятие «мощность», обозначаемое далее буквой *N.* Скаляр - мощность в электромеханической системе может быть представлена в виде



- угловая скорость якоря, - магнитный поток, - ток, *Ф=B\*S, B -*магнитная индукция, *S-* эффективная площадь, пронизываемая магнитным потоком.

Мощность в механической системе – в динамике якоря



Мощность в электрическом контуре



Следовательно, если часть мощности поступающего в контур напряжения надо передать в механическую подсистему, для согласования переменных в представленной системе уравнений потребуем, чтобы эта мощность



 называют противоЭДС.

Уравнения модели двигателя представляются в виде системы



 называют коэффициентом электромеханического преобразования.

В практической работе часто падением напряжения на катушке пренебрегают (индуктивность *L* – очень маленький коэффициент, а сопротивление R обеспечивает затухание невозмущенного решения)



Следовательно, система, описывающая динамику двигателя, имеет вид



Таким образом, в рассматриваемой задаче ( и  надо измерять)



**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Модель Циглера.**

**МОДЕЛЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ**

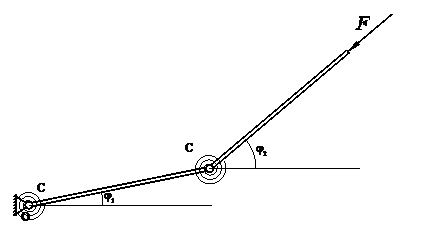


РИС. 1.

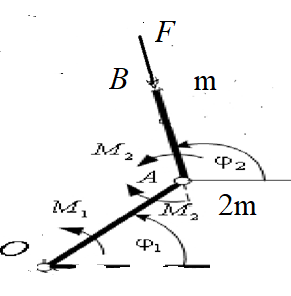


РИС 2.

Рассмотрим расположенную в горизонтальной плоскости систему двух стержней, связанных между собой и с неподвижной опорой. На второй стержень действует сила , направленная вдоль стержня (следящая сила). Это система может рассматриваться как простейшая модель упругого стержня, находящегося под действием следящей силы. Будем считать, что на стержни действуют пары сил с моментами и . Эти моменты могут создаваться спиральными пружинами (рис.1) или двигателями постоянного тока с независимым возбуждением (рис.2). При этом всегда надо помнить, что действие сопровождается противодействием и поэтому моменту сил, действующих со стороны помещенного в промежуточный шарнир двигателя на второе тело, отвечает момент, действующий на первый стержень.

Положение системы будем определять углами  и . Пусть длины невесомых стержней одинаковы и равны  соответственно. Между стержнями находится цилиндрический шарнир массы 2m, а в конце второго стержня находится точечная масса m. Эта модельная задача посвящена вопросам сохранения монолитного состояния корпуса реактивного самолета, который на самом деле имеет конечную жесткость, при работе двигателя.

Действующие моменты предствляются в виде



И



Жесткости спиральных пружин одинаковы и равны . Обе пружины находятся в недеформированном состоянии, когда стержни расположены на одной прямой. Второе слагаемое отражает либо наличие вязкого демпфера, либо влияние противоЭДС двигателя.

Даже для данной довольно простой системы составление уравнений движения требует процедуры, рассчитанной на достаточно высокую квалификацию. Если, например, воспользоваться методами аналитической механики, надо составить выражение для кинетической энергии, потенциальной энергии (если силы имеют потенциал), получить выражение для обобщенных сил (если силы непотенциальны или их потенциальность не установлена). Затем, для получения уравнений динамики, использовать технику Лагранжа. В рассматриваемой задаче уравнения, конечно, окажутся нелинейными, поскольку войдут тригонометрические функции углов. Будем предполагать, что при отсутствии следящей силы тела будут вытянуты в горизонтальную струнку и воспользуемся линеаризованной моделью. При приложении следящей силы углы  и  начнут изменяться. Сначала изменения углов будут малы и в зависимости от величины следящей силы могут или остаться малыми, или начать неограниченно нарастать. Интересно определить величину следящей силы, при которой в линейной модели возникнут растущие моды.

Кинетическая энергия



Мощность







Обобщенные силы



Введем параметры



В матричном виде система линеаризованных уравнений данной системы



**ПАРАДОКС ЦИГЛЕРА**

Характеристическое уравнение



Сначала рассмотрим случай 



При этом условия устойчивости





В общем случае

характеристическое уравнение



При этом условия устойчивости



Сравним результаты при параметре b стремящемся к нулю. Они не одинаковы! Более того, возникновение растущих мод, исходя из анализа общего случая, при параметре b равном нулю возникает при меньших значениях величины следящей силы, чем в модели, не учитывающей силу трения.

Это явление носит название «Парадокс Циглера».